



Νέες φωνήες

① $q(\vec{x}) = 4x^2 - 2xz + 3y^2 + 4z^2, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}$
 αναγωγή $4x^2 - 2xz + 3y^2 + 4z^2 - 2\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}z - 7 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, q(\vec{x}) = {}^t X A X$, παρατηρώ ότι A συμμετρικός
 $\Rightarrow \exists$ ορθογώνιος P ${}^t P A P = \Lambda$

$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

Εισαγωγή $\lambda A = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (3-\lambda) \left((4-\lambda)^2 - (-1)^2 \right) = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(4-\lambda-1)(4-\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (3-\lambda)^2 (5-\lambda) = 0$ ($\lambda = 3$ διττή), ($\lambda = 5$ απλή)

Γράφω Γ-Σ.

$V(3): \begin{cases} x+0y-z=0 \\ 0=0 \\ -x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=t \in \mathbb{R} \\ x=t, y=k \in \mathbb{R}, z=t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x=t, y=k, z=t, k, t \in \mathbb{R}\} = \{(t, k, t) \in \mathbb{R}^3, t, k \in \mathbb{R}\}$

$= \{t(1, 0, 1) + k(0, 1, 0), t, k \in \mathbb{R}\} = (t, 0, t) + (0, k, 0)$

$= \langle (1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$ διαπιστώνω ότι είναι γραμμικά $\Rightarrow$
 βάση του $V(3)$

$V(5) = \begin{cases} -x-z=0 \\ -2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$ θέτω $z=t, x=-t$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x=-t, y=0, z=t\} = \{t(-1, 0, 1), t \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (-1, 0, 1) \rangle$ βάση του $V(5)$



Παρατηρούμε ότι τα $\{(1,0,1), (0,1,0), (-1,0,1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή $\det |1 \neq 0$.

Είναι φανερό, από ΤΕΡΙΤΤ η G-S, από κενονο-
κόποιουμε τα διανύσματα.

Το $(1,0,1)$ έχει μέτρο $\| \cdot \| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Έχουμε $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Οι κύρια άξονες της q.

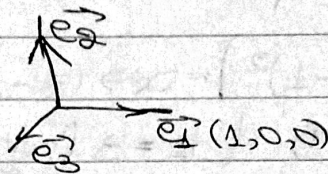
$\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$

$\vec{e}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim$

$q = {}^t X A X = {}^t \Delta \Delta$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$



$\Rightarrow q(\vec{x}') = 3(x')^2 + 3(y')^2 + 5(z')^2$

$4x^2 - 2xz + 3y^2 + 4z^2 - 2\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}z - 7 = 0$

, Άρα $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$

$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ y' \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \end{cases}$

$3(x')^2 + 3(y')^2 + 5(z')^2 - 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) + 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'\right) - 7 = 0$

$\Rightarrow \frac{(x'+1)^2}{2013} + \frac{(y')^2}{2013} + \frac{(z'+1)^2}{4} = 1$

Ελλειψοειδές εκ περιγραφής της ελλειψης $\frac{(x+1)^2}{2013} + \frac{(z+1)^2}{4} = 1$

Για να το σχεδιάσουμε $y'=0$

$K'(-1, 0, -1)$, γύρω από τον OZ

$P \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \dots (x, y, z) = (0, 0, -2/\sqrt{2})$



AGN. $(E_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-6}{1}, z=2, (E_2): x = \frac{2y-2}{7} = \frac{2z-2}{7}$

$\vec{a_1} = (2, 1, 0) \parallel (E_1) \quad \left| \begin{array}{l} x = \frac{y-1}{7/2} = \frac{2-1}{11/2} \\ A = (1, 6, 2) \in (E_1) \end{array} \right.$

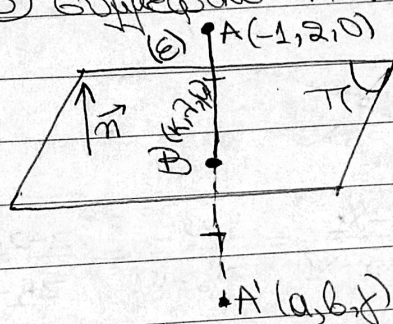
$\vec{a_2} = (1, 7/2, 1/2) \parallel (E_2) \Rightarrow B = (6, 1, 1) \in (E_2)$

$\Leftrightarrow \vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{AB}$ είναι συνεπίκεντρα $\Leftrightarrow (\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{AB}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} \\ \vec{AB} \end{vmatrix} = 0$

β) οι $(E_1), (E_2)$ τέμνονται $\Leftrightarrow$ τα $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ τέμνονται (δεν είναι παράλληλα / συγγραμ.) 2ος οριζ. έλεγχος Γ.Α.Γ.Ε.

$\cos(\vec{a_1}, \vec{a_2}) = \frac{\langle \vec{a_1}, \vec{a_2} \rangle}{\|\vec{a_1}\| \cdot \|\vec{a_2}\|}$

⑤ ευθεία $A(-1, 2, 0)$ ως τμήτς $(\pi): x+2y-z+1=0$



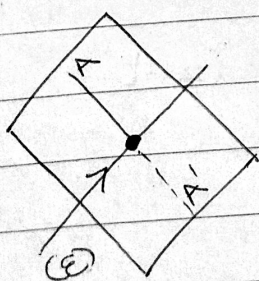
Από θεωρία
 $(\pi): Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$
 $\vec{n} = (A, B, \Gamma) \perp \pi$

Τροχισματισμός: $(E) \quad \frac{x-(-1)}{1=x'} = \frac{y-2}{2=y'} = \frac{z-0}{-1=z'}, \vec{n}(1, 2, -1) \parallel (E)$

$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$

$(k, \lambda, \mu) = (-5/3, -1/3, 2/3)$

$\frac{0+\gamma}{2} = \mu, \quad \frac{-1+\alpha}{2} = k, \quad \frac{2+\beta}{2} = \lambda$



$(x_0, y_0, z_0) \in (\pi)$

$\forall (\pi) A(x-x_0) + B(y-y_0) + \Gamma(z-z_0) = 0$

$\vec{n} = (A, B, \Gamma) \perp (\pi)$

Εύρεση Εξίσωσης των διόχεται από το σημείο A (1,2,0), δηλ.

Α6Κ2

b) A (1,2,0) ∈ (ε')

(ε') και είναι κάθετη στην (ε)
$$\begin{cases} x+y+z+1=0 & (\pi_1) \\ x-y+2z+2=0 & (\pi_2) \end{cases}$$



1^η λύση:

$$\begin{aligned} \vec{a_1} &= (1,1,1) \perp (\pi_1) \\ \vec{a_2} &= (1,-1,2) \perp (\pi_2) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{a_1} &= (1,1,1) \perp (\pi_1) \\ \vec{a_2} &= (1,-1,2) \perp (\pi_2) \end{aligned}} \right\} \vec{a_1} \times \vec{a_2} \perp \vec{a_1}, \vec{a_2} \perp (\pi_1), (\pi_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a_1} \times \vec{a_2} \parallel (\varepsilon)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -1, -2)$$

Δείχνουμε διάνυσμα $\parallel (\varepsilon') \perp (\varepsilon)$
 άρα $\vec{a} (1,1,1) \perp (3,-1,-2) \Rightarrow \underline{\underline{(1,1,1) \parallel (\varepsilon')}}$

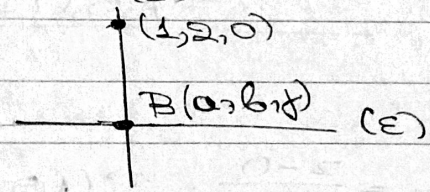
(ε'):
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-0}{1}$$

Τελος

2^η λύση:

A (1,2,0)

προσπαύμε $\vec{a_1} \times \vec{a_2} = (3, -1, -2) \parallel (\varepsilon)$



Εύρεση (B)
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{x-1}{1\tau} = \frac{y-2}{2\tau} = \frac{z}{13}$$

Για να συγκρίνουν 2 ευθείες πρέπει να είναι ευχάτες.

Η 2^η λύση είναι η σωστή! Δεν θα τρέξε κατ'επίλογον.

Θέτο

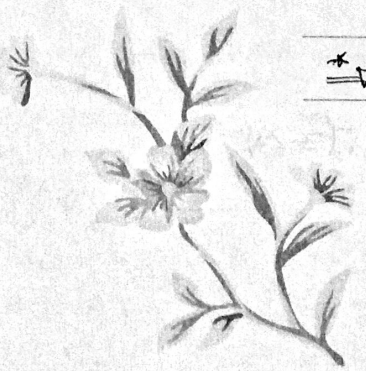
Αςκ:
(αυτοπία)
παιδί

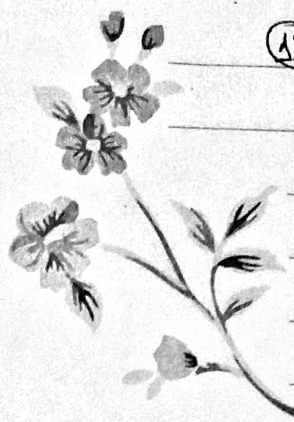
$$\begin{aligned} x+y+z+1 &= 0 \\ x-y+2z+2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [z=t] \Rightarrow \begin{cases} x+y = -1-t \\ x-y = -2-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 2x &= -3-3t \Rightarrow x = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}t \\ 2y &= 1+t \Rightarrow y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \end{aligned} \end{aligned}$$

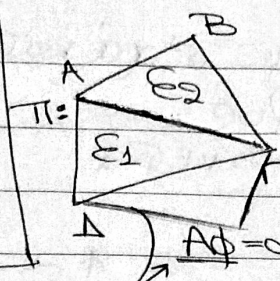
$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}t, y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, t \in \mathbb{R}, z = t$$

$$\Rightarrow \frac{x - (-3/2)}{-3/2} = \frac{y - 1/2}{1/2} = \frac{z - 0}{1}$$

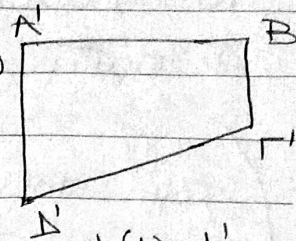




12) $A(1, -1, 2)$
 $B(2, 2, 2)$
 $\Gamma(0, 1, -3)$
 $\Delta(1, 1, 0)$



ϕ
 $\phi(\pi)$
 $A\phi = \phi \circ \phi \Rightarrow \det A = \pm 1$



$\phi(A) = A'$
 $\phi(B) = B'$
 $\phi(\Gamma) = \Gamma'$
 $\phi(\Delta) = \Delta'$

$E(\phi(\pi)) = |\det A| E(\pi)$, ϕ γραμμική μετασφ.

$E_1 = \frac{1}{2} | \vec{AB} \times \vec{AG} |$

(για να βρω το εμβαδόν, συμπληρώ το παραλλ.)

$E_2 = \frac{1}{2} | \vec{BA} \times \vec{BG} |$

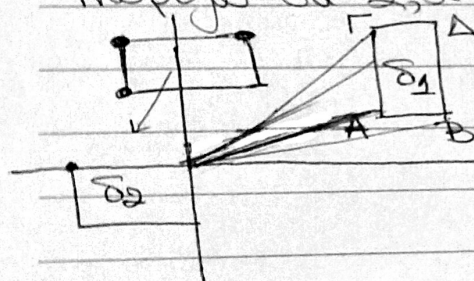
(δεν έχω καν τριγών, γι' αυτό ο τύπος.)

Παλ.

$\Sigma \delta_1 = \{ (5, 2), (7, 2), (5, 5), (7, 5) \}$

$\Sigma' \delta_2 = \{ (0, -1), (0, -3), (-3, -3), (-3, -1) \}$

Γνωρίζω ότι Σ, Σ' ισχύει $\exists \phi$ ισομετρία $\phi(\Sigma) = \Sigma'$.



✓ να κινδυνεύει σε ό,τι έχουμε κάνει στα μαθηματά! τρελόμορα θα τρέξουν

Ισομετρία = (ορθογώνιος) $\circ$ (μεταφορά)

$\phi = R + \vec{a}$

$\phi = \left(\begin{array}{c} \text{εστiaση} \\ \text{ακίνητοση} \end{array} \right) + \text{μεταφορά}$
 $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\phi \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$
 + μεταφορά $(2, -8)$

$A(5, 2) \mapsto A'(-2, 5) + (2, -8) = (0, -3)$
 $B(7, 2) \mapsto B'(-2, 7) + (2, -8) = (0, -1)$
 $\Gamma(5, 5) \mapsto \Gamma'(-5, 5) + (2, -8) = (-3, -3)$
 $\Delta(7, 5) \mapsto \Delta'(-5, 7) + (2, -8) = (-3, -1)$



ορίσω f γραφή κατά $\pi/2$, τ μεταφορά κατά $(2, -8)$

$\Rightarrow$ παρατηρώ ότι $\exists \phi = f \circ e$
ισομετρία

Εάν εσφαλμένον να δώ.

$$\delta_1 \xrightarrow{\phi} \delta_2 \Rightarrow \delta_1 = \delta_2$$

$$A \xrightarrow{(5,2)f} A' \xrightarrow{e} A''(0, -3)$$

$$B \xrightarrow{(7,2)f} B' \xrightarrow{e} B''(0, -1)$$

$$\Gamma \xrightarrow{(5,5)f} \Gamma' \xrightarrow{e} \Gamma''(-3, 3)$$

$$\Delta \xrightarrow{(7,5)f} \Delta' \xrightarrow{e} \Delta''(-3, 1)$$